## Работы молодых ученых

УДК 550.348

# АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАССОПЕРЕНОСА РАДОНА ($^{222}Rn$) В ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

**© 2007 Р. И. Паровик**

*Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН*
*684034, с. Паратунка, ул. Мирная,7; e-mail:romano84@mail.ru*

Предложен алгоритм решения обратной коэффициентной задачи массопереноса радона в приземный слой атмосферы. В качестве экспериментальных данных выступали численные решения прямой модельной задачи, полученные конечноразностным методом. Для приближения численных решений к экспериментальным данным моделировалась случайная ошибка. Проведен анализ результатов решения линейной обратной задачи для диффузионной и диффузионно-конвективной модели.

## ВВЕДЕНИЕ

В ходе обработки экспериментальных данных возникает проблема оценивания параметров модели процесса. Зачастую не удается получить нужной информации об интересующем нас параметре. Это может быть связанно, например, со скудностью экспериментальных данных. Однако, имея математическую модель данного процесса и некоторый набор экспериментальных данных можно попытаться все-таки оценить интересующий нас параметр. Такие задачи относят к классу обратных задач.

Решение обратных задач математической физики подразумевает восстановление с какой-то степенью достоверности параметров модели процесса по экспериментальным данным. К таким задачам относят, в том числе, теоретическое и количественное определение коэффициентов модели, функции источника, и т.д. Если параметры модели зависят от многих параметров, то возникают и нелинейные обратные задачи, в противном случае задачи переходят в класс линейных обратных задач.

Обычно обратные задачи выделяются в класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Такие задачи характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольным, в том числе, и большим изменениям решений. Такие задачи принадлежат к классу некорректно поставленных задач (Тихонов и др., 1990).

С целью поиска предвестников сильных землетрясений представляет определенный интерес проанализировать экспериментальные данные, касающиеся параметров процесса динамики концентрации подпочвенного радона (Фирстов, Рудаков, 2003; Паровик и др., 2006а; Паровик и др., 2006б). Имеющиеся данные позволяют получить некоторые представления о виде временной зависимости интересующих нас параметров задачи и выявить взаимосвязи между полем подпочвенного радона и напряженно-деформированным состоянием геосреды. С целью поиска предвестников сильных землетрясений, происходящих в районе южной Камчатки, на Петропавловск - Камчатском геодинамическом полигоне в течение последних десяти лет функционирует сеть станций мониторинга объемной активности радона (ОА Rn), созданной и обслуживающей сотрудниками Института вулканологии и сейсмологии ДВО РАН (Фирстов, 1999).

Настоящая работа является продолжением исследований процессов массопереноса радона из рыхлых отложений в приземный слой атмосферы (Паровик и др., 2006а; Паровик и др., 2006б). В этой работе рассматривается алгоритм решения линейной обратной задачи массопереноса радона в приземную атмосферу на основе линейной одномерной диффузионной - конвективной модели (D-K) с постоянными коэффициентами (Паровик и др., 2006б). Опробуется алгоритм и для диффузионной модели (D) анализ которой подробно дан в работе (Паровик и др. 2006а). Предлагаемый алгоритм позволяет с определенной степенью точности восстановить коэффициенты молекулярной диффузии в грунте и турбулентной диффузии в приземном слое атмосферы. В связи с отсутствием экспериментальных данных для реализации предлагаемого алгоритма в качестве исходных использовались численные решения D-K (D) модели с шумом, который моделировался специальным образом.

## МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА РАДОНА В ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

Учитывая геотектонические особенности района Паратунского грабена, где осуществляется мониторинг ОА Rn, имеет смысл рассматривать D-K модель массопереноса радона в приземный слой атмосферы. Такая модель позволяет наиболее адекватно описать процесс массопереноса радона из крупнопористой, вблизи тектонических разломов, среды в приземную атмосферу.

Модель массопереноса радона в приземный слой атмосферы представлена в виде задачи, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, где первое нестационарное уравнение отвечает за миграцию радона в грунте, а второе стационарное уравнение - за миграцию радона в приземном слое атмосферы (Новиков,1989). Массоперенос радона в грунте осуществляется механизмами диффузии и конвекции, а в приземном слое атмосферы массоперенос радона протекает под действием турбулентной диффузии (Новиков, Капков, 1965). Предполагается, что массоперенос радона в приземной части атмосферы происходит в вертикальном направлении свободно, в условии безветренной погоды. Параметры системы постоянны, т.е. считаем, что, начиная с некоторого момента времени процесс массопереноса радона, является установившимся.

После таких допущений наша задача принимает следующий вид:

$$\begin{cases} D\dfrac{\partial^2 N_1(z,t)}{\partial z^2} - v\eta\dfrac{\partial N_1(z,t)}{\partial z} - \lambda\eta N_1(z,t) - \eta\dfrac{\partial N_1(z,t)}{\partial t} + Q = 0 \\ A\dfrac{\partial^2 N_2(z,t)}{\partial z^2} - \lambda N_2(z,t) = 0 \end{cases}$$

1) $z=0 \quad N_1(0,t)=N_2(0,t), \eta D\left.\dfrac{\partial N_1(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} - v\eta N_1(0,t) = A\left.\dfrac{\partial N_2(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}$

2) $z\to-\infty \quad N_1(-\infty,t)=N_\infty, z\to\infty \quad N_2(\infty,t)=0,$

3) $t=0 \quad N_1(z,0)=N_\infty$

Результаты анализа точного и численного решений задачи (1) были отражены в работе (Паровик и др., 2006б). В этой же работе для исследуемой задачи достаточно подробно был описан и вывод аналитического решения. В настоящей работе сделаем упор на численные решения модельной задачи (1), так как численные решения хорошо аппроксимируют точные решения исходной задачи, а алгоритм решения легко может быть реализован на ЭВМ. Численные решения задачи (1) получены конечноразностным методом (Самарский, 1971). Для этого строилась равномерная сетка по пространственной и временной координате, узлами которой являются значения сеточной функции решения. Частная производная заменяется конечноразностным аналогом. Аналогичным образом происходит аппроксимация краевых условий. Для аппроксимации уравнений в системе (1) была взята неявная разностная трехточечная схема второго порядка точности.

Устойчивость численных решений проверялась методом малых возмущений входных данных. Незначительное изменение входных параметров в нашей модели влекло незначительное изменение ее численного решения. Это подтверждает, что численное решение непрерывно зависит от входных данных, т.е. оно устойчиво.

После таких преобразований мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений с краевыми условиями:

$$\begin{cases} u_{N-1}^{k+1} - Ku_N^{k+1} + u_{N+1}^{k+1} = 0 \\ Mu_{i-1}^{k+1} - Ru_i^{k+1} + G\cdot u_{i+1}^{k+1} = f_i^k, i=0,1,..,N-1,N,N+1,..,M-1; k=0,1,..,L \end{cases} \tag{2}$$

$$R = P - \frac{v\tau}{h}, \quad G = M - \frac{v\tau}{h}, \quad M = \frac{\tau D}{\eta h^2},$$

$$P = 1 + \lambda\tau + 2M, \quad K = 2 + \frac{h^2\lambda}{A}.$$

$$\begin{aligned} &1)\eta D u_{N-1}^{k+1} - (A+\eta D)u_N^{k+1} + Au_{N+1}^{k+1} = 0 \\ &2)u_N^k = 0, u_0^k = N_\infty \\ &3)u_i^0 = N_\infty \end{aligned} \tag{3}$$

Система уравнений (2) имеет трехдиагональную структуру и поэтому может быть решена методом прогонки (Самарский, 1971). Для устойчивости прогоночных формул необходимо выполнение следующих условий на коэффициенты системы (2) $K>2$, $R>M+G, K>0$, $M>0$, $G>0$ и на коэффициенты прогоночных формул $0\le q_N$, $q_M$, $p_N$, $q_M\le1$.

В окончательном виде решения системы (2) запишутся в виде:

$$u_N^{k+1} = p_N u_{N+1}^{k+1} + q_N,\ p_N = \frac{-1}{p_M + K},\ q_N = \frac{-q_M}{p_M + K}$$

$$u_M^{k+1} = p_M u_{M+1}^{k+1} + q_M,\ p_M = \frac{-A}{\eta D(p_i - 1) - A},\ q_M = \frac{\eta D q_i}{\eta D(p_i - 1) - A}$$

$$u_i^{k+1} = p_i u_{i+1}^{k+1} + q_i,\ p_i = \frac{G}{R - M p_{i-1}},\ q_i = \frac{f_i^k + M q_{i-1}}{R - M p_{i-1}}$$

$$q_0 = \varphi_0,\ p_0 = 0,\ i = 0,1,..,M-1,M,M+1,..,N-1;\ k = 0,1,..,L$$

## АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МАССОПЕРЕНОСА РАДОНА В ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ КАК РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОФИЗИКИ

В основе алгоритма лежит метод наименьших квадратов, в нашем случае это задача минимизации невязки между правыми и левыми частями уравнений системы (1). Предположим, что у нас имеется J датчиков измерения ОА Rn, причем датчики расположены на различных глубинах, а регистрация радона осуществляется в точках наблюдения одновременно.

Заменим в системе (2) дифференциальные уравнения конечными разностями, тогда задача оценивания коэффициентов диффузии и турбулентной диффузии сводится к минимизации соответствующих функционалов:

$$S_D = \sum_{i=1}^{J}\left(\eta\frac{\left(u_i\left(t_{i+1}\right)-u_i\left(t_i\right)\right)}{\tau_i} - D_i\frac{\left(u_{i+1}\left(t_i\right)-2u_i\left(t_i\right)+u_{i-1}\left(t_i\right)\right)}{h_i h_{i-1}} + \nu\eta\frac{\left(u_{i+1}\left(t_i\right)-u_i\left(t_i\right)\right)}{h_i} + \lambda\eta u_i\left(t_i\right) - Q\right)^2$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{J}\left(A_i\frac{\left(u_{i+1}\left(t_i\right)-2u_i\left(t_i\right)+u_{i-1}\left(t_i\right)\right)}{h_i h_{i-1}} - \lambda u_i\left(t_i\right)\right)^2 \qquad (4)$$

$h_i = h_{i+1} - h_i$ - шаг по пространству, $t_i = t_{i+1} - t_i$ - шаг по времени.

В нашем случае $D_i$ и $A_i$ и постоянные коэффициенты, тогда можно записать их в виде: $D$, $A$. После не сложных преобразований в (4); дифференцирование первого уравнения по $D$, а второго – по $A$ и после приравнивания полученных производных к нулю, мы получаем соответствующие оценки $\bar{D}$ и $\bar{A}$ для коэффициентов $D$ и $A$:

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{J}\left(\eta\frac{\left(u_i\left(t_{i+1}\right)-u_i\left(t_i\right)\right)}{\tau_i} + \nu\eta\frac{\left(u_{i+1}\left(t_i\right)-u_i\left(t_i\right)\right)}{h_i} + \lambda\eta u_i\left(t_i\right) - Q\right)\cdot\left(\frac{\left(u_{i+1}\left(t_i\right)-2u_i\left(t_i\right)+u_{i-1}\left(t_i\right)\right)}{h_i h_{i-1}}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{J}\left(\frac{\left(u_{k+1}\left(t_k\right)-2u_k\left(t_k\right)+u_{k-1}\left(t_k\right)\right)}{h_k h_{k-1}}\right)^2\right)^{-1}$$

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^{J}\frac{\lambda u_i\left(t_i\right)\left(u_{i+1}\left(t_i\right)-2u_i\left(t_i\right)+u_{i-1}\left(t_i\right)\right)}{h_i h_{i-1}}\left(\sum_{k=1}^{J}\left(\frac{\left(u_{k+1}\left(t_k\right)-2u_k\left(t_k\right)+u_{k-1}\left(t_k\right)\right)}{h_k h_{k-1}}\right)^2\right)^{-1} \qquad (5)$$

Для определения коэффициентов диффузии и турбулентной диффузии необходимо наличие как минимум 3-х разноглубоких точек наблюдения (в нашем случае в (5) J=3). Например, в грунте на глубине 1м, на поверхности и в приземном слое атмосферы на высоте 1м. По трем точкам можно аппроксимировать вторую производную по пространственной координате.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ШУМА

Так как для рассмотренного выше алгоритма и мест расположения датчиков реальные экспериментальные данные пока отсутствуют, то в качестве таких данных выступает численное решение D-K модели (3) со случайным шумом, $\bar{N} = N^{chisl} + \delta N$, $N^{chisl}$ - численное решение модели (1), полученное конечно разностным методом, $\delta N$- случайная ошибка, распределенная по нормальному закону. Случайная ошибка моделировалась следующим образом:

1. Генерировались 2 случайных равномерно распределенных на интервале (0,1) числа $\gamma_1$, $\gamma_2$.
2. По формуле $\sqrt{-2\ln\left(1-\gamma_1\right)}\cos\left(2\pi\gamma_2\right)$ генерировалось распределение по нормальному закону N(0,1).
3. Погрешность датчика 10% , поэтому пользуясь соотношением N(0,δ)=δ* N(0,1) и учитывая, что δ=0.1 получаем N(0,0.1)=0.1 N(0,1).

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В расчетах использовались следующие значения параметров задачи: D=0.0005 см²/с, A=1000 см²/с, ν=0.0001 см/с, η=0.25, $\lambda=2.1\ 10^{-6}$ с$^{-1}$.Шаги по времени и по пространству брались равномерными: τ=0.25 с, h=1см. Расчеты проводились как для D-K модели, так и D модели массопереноса радона и их эксхаляций в приземный слой атмосферы.

Результаты расчетов приведены в таблице.

Результаты расчетов обратной задачи выявили следующее: были получены хорошие оценки коэффициента диффузии в грунте как для D-K модели, так и для D-модели при зашумленных и не зашумленных данных, погрешность коэффициента диффузии $\varepsilon_D$ и коэффициента турбулентной диффузии $\varepsilon_A$ от соответствующих истинных значений коэффициентов составила около 5%.

В приземном слое атмосферы для не зашумленных данных коэффициент турбулентной диффузии не значительно отличается от своего истинного значения в D-K и D модели. Для зашумленных данных мы получаем большую ошибку, так как концентрация радона на земной поверхности мала и убывает медленно с высотой. Для уменьшения ошибки в этом случае необходимо модернизировать алгоритм методами регуляризации, например регуляризацией нулевого порядка по Тихонову (Тихонов и др., 1990):

**Таблица.** Расчет обратной задачи массопереноса радона в приземную атмосферу

| Истинное значение коэффициентов диффузии и турбулентной диффузии, см$^2$/с | Оцененное значение при не зашумленных данных, см$^2$/с | | Оцененное значение при зашумленных данных, см$^2$/с | |
|---|---|---|---|---|
| | D-K модель | D-модель | D-K модель | D-модель |
| D =0.0005 | 0.000472975 | 0.00049798 | 0.000502182 | 0.00052661 |
| A=1000 | 999.9998363 | 999.9998363 | -0.0000006839 | -0.0000006839 |
| Ошибки % | | | | |
| D-K модель | | D- модель | | |
| Ошибка без шума | Ошибка с шумом | Ошибка без шума | Ошибка с шумом | |
| $\varepsilon_D$ = -0.436416335 | $\varepsilon_D$ =5.404944717 | $\varepsilon_D$ =0.404944092 | $\varepsilon_D$ = -5.321656129 | |
| $\varepsilon_A$ =0.000016360 | $\varepsilon_A$ =100 | $\varepsilon_A$ =0.000016360 | $\varepsilon_A$ =100 | |

$$S_A = \sum_{i=1}^{J} \left( \frac{A\left(u_{i+1}\left(t_i\right) - 2u_i\left(t_i\right) + u_{i-1}\left(t_i\right)\right)}{h_i h_{i-1}} - \lambda u_i\left(t_i\right) \right)^2 + \beta A^2$$

$\beta$ - параметр регуляризации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгоритм решения обратной линейной задачи достаточно хорошо восстанавливает коэффициент диффузии в грунте, для коэффициента турбулентной диффузии необходимо применить методы регуляризации.

В D-K модели коэффициенты диффузии и турбулентной диффузии предполагались постоянными, в реальных условиях эти коэффициенты зависят, по крайней мере, от времени, что требует определение коэффициентов обратной нелинейной задачи. В этом случае, для определения вида временной зависимости оцениваемых коэффициентов, возможно, придется решать некорректно поставленную задачу. Такую задачу можно попробовать решить, например, известными численными методами регуляризации (Самарский, Вабишевич, 2007).

Для получения экспериментального материала, который бы соответствовал условиям реализации алгоритма, планируется летом 2007 года на сети станций, осуществляющей мониторинг объемной активности радона провести необходимые измерения. Измеренные данные позволят осуществить проверку алгоритма решения для обратной коэффициентной задачи миграции радона в приземный слой атмосферы и так же провести последующую его корректировку, если это будет необходимо. Оценка коэффициентов диффузии в грунте и турбулентной диффузии в приземной атмосфере, позволит определить интенсивность процесса массопереноса радона и выявить аномалии ОА Rn, которые имеют место в районе наблюдения.

## Список литературы

*Новиков Г.Ф.* Радиометрическая разведка. Л.: Наука, 1989. 407 с.

*Новиков Г.Ф., Капков Ю.Н.* Радиоактивные методы разведки. М.: Недра, 1965. 750 с.

*Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П.* Модель массопереноса радона (ОА $^{222}$Rn) в приземном слое атмосферы // Вестник КРАУНЦ. Серия: Науки о Земле. 2006а. № 1. Вып. 7. С. 110-114.

*Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П.* Модель массопереноса радона (ОА $^{222}$Rn) в приземном слое атмосферы // Вестник КРАУНЦ. Серия Науки о Земле. 2006б. № 2. Вып. 8. С. 128-133.

*Самарский А.А., Вабишевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: ЛКИ, 2007. 480 с.

*Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 550 с.

*Тихонов А.А., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

*Фирстов П.П.* Мониторинг объемной активности подпочвенного радона ($^{222}$Rn) на Паратунской гидротермальной системе в 1997-1998 гг. с целью поиска предвестников сильных землетрясений Камчатки // Вулканология и сейсмология. 1999. № 6. С. 33-43.

*Фирстов П.П., Рудаков В.П.* Результаты регистрации подпочвенного радона в 1997-2000 гг. на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне // Вулканология и сейсмология. 2003. № 1. С. 33-43.

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

# THE ALGORITHM OF THE DECISION OF INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR MASS TRANSFER RADON ($^{222}Rn$) IN SURFACE LAYER OF THE ATMOSPHERE

**R. I. Parovik**

*Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation, Far East Division Academy of Sciences, Paratunka, 684034, Russia; e-mail:romano84@mail.ru*

The algorithm of the decision of inverse coefficient problem for mass transfer radon in surface layer of the atmosphere is offered. For approach of numerical decisions experimental data the random error was modeled. The analysis of results of the decision of a linear inverse problem for diffusion and diffusion-convection models is lead.