

УДК 550.34+551.24

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОТАЦИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ БЛОКОВОЙ ГЕОСРЕДЫ

Герус А.И.^{1,2}

¹ *Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН*

² *Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга*

Научный руководитель д.ф.-м.н Викулин А.В.

В работе рассмотрено два подхода к моделированию ротационных движений земной коры: в геофизическом приближении (до сотен-тысяч лет), когда земная кора предполагается твердой и блоковой, и в геологическом приближении (миллион лет и более), когда земную кору можно считать текучей средой. Приведены соответствующие математические модели, численные результаты и их интерпретация.

Ключевые слова: блоковая геосреда, ротационная модель, уравнение синус-Гордона, вихревые структуры, задача Дирихле-Римана.

1. В геофизическом приближении на небольших временах рассмотрения процесса (до сотен-тысяч лет) земную кору можно считать эффективно «твердой», состоящей из большой совокупности структурных элементов – блоков. Разработаны модели геофизических процессов, протекающих в блоковых средах (работы А.В. Пейве, М.А. Садовского и др.).

Ротационная модель с собственным моментом блока для сейсмического процесса в пределах окраины Тихого океана построена А. В. Викулиным и А. Г. Иванчиным [4]. Она опирается на представления, согласно которым движение блока вдоль поверхности вращающейся Земли механически эквивалентно его движению в не вращающейся (инерциальной) системе координат под действием собственного момента (спина). Такое движение блока создает в окружающей его земной коре напряжения с моментом силы, сопровождается формированием волн поворотных деформаций и позволяет объяснить многие закономерности геодинамического процесса, включая особенности волновых движений

геосреды, ее нелинейные, реидные и «вихревые» свойства [1]. Уравнение движения сейсмофокального блока в цепочке представляет собой известное уравнение синус–Гордона (СГ) [1, 4], которое в рамках ротационной модели является следствием закона сохранения момента блока при его движении:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta, \quad (1)$$

где $\theta = \beta/2$, $\xi = k_0 z$ и $\eta = v_0 k_0 t$ – безразмерные координаты, z – расстояние вдоль цепочки блоков, t – время, β – функция угла поворота, v_0 – характерная скорость процесса, k_0 – волновое число.

Уравнение СГ имеет множество аналитических решений, одним из которых является функция следующего вида:

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{X - u \eta}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right], \quad (2)$$

$$X = \xi - \xi_0, u = \frac{U}{c_0}, c_0^2 = \frac{3\sqrt{15}}{8\pi^2} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \Omega R_0,$$

где U – скорость распространения уединенной волны деформации (поворота). Такое решение называется *солитонным* и представляет собой уединенную волну.

1.1 В модели движения среды, описываемой уравнением СГ (1), блоки равномерно поворачиваются друг относительно друга, и скорость распространения волны вдоль цепочки постоянна во времени. Для более точного описания реального сейсмического процесса необходимо дополнить ротационную модель эффектами отклонения моментов сил блоков от равновесных положений μ и трения на границах α . В результате закон движения блока в цепочке можно получить в виде модифицированного уравнения СГ [2]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \mu \delta(\xi) \sin \theta, \quad (3)$$

где $\delta(\xi)$ – Функция Дирака. Уравнение (3) решалось численно методом МакЛафлина–Скотта, суть которого заключается в том, что при использовании функции Грина решение возмущенного уравнения СГ структурно совпадает с (2), но координата X и скорость u зависят от времени и связаны соотношением:

$$X = \int_0^t u(t') dt' + x_0(t), \quad \frac{dX}{dt} = u(t) + \frac{dx_0}{dt}$$

Подстановка этого соотношения и (2) в (3) дает систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\eta} &= -\alpha u(1-u^2) + \frac{\mu}{2}(1-u^2) \operatorname{sech}^2\left(\frac{X}{(1-u^2)^{1/2}}\right) \operatorname{th}\left(\frac{X}{(1-u^2)^{1/2}}\right) \\ \frac{dX}{d\eta} &= u - \frac{\mu}{2} u X \operatorname{sech}^2\left(\frac{X}{(1-u^2)^{1/2}}\right) \operatorname{th}\left(\frac{X}{(1-u^2)^{1/2}}\right) \end{aligned}$$

Безразмерные координаты X и скорости u рассчитывались с помощью последних соотношений методом Рунге-Кутты, а затем подставлялись в (2).

Начальные условия $x_0 = 0$, $t_0 = 0$, $u_0 = 10^{-10}$ ($u = U/c_0$ – безразмерная скорость) выбирались таким образом, чтобы скорость деформирования не превышала значения $\dot{\theta}_0 \leq 10^{-13} \text{ с}^{-1}$, что близко к средней скорости деформации в сейсмоактивных [9] и вулканических [7] областях и заметно отличается от глобальной средней скорости деформации (вращения отдельных блоков) в различных регионах Земли, оцениваемой величиной $5,5 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-1} \approx 1\text{-}2 \text{ град/млн. лет}$ [10]. Следует отметить, что значение скорости 10^{-13} с^{-1} по порядку величины близко теоретической модельной оценке величины угла $\beta_0 \approx 10^{-2} \text{ град.}$, на который в рамках ротационной модели поворачивается «элементарный» сейсмофокальный блок между двумя последовательными во времени сильнейшими землетрясениями с очагами в его пределах.

При этом скорость распространения локализованной волны уже не является величиной постоянной, так как кроме угловой скорости вращения тела Ω зависит также и от параметров α и μ .

На рис. 1 в качестве примера приведено характерное численное решение возмущенного уравнения СГ.

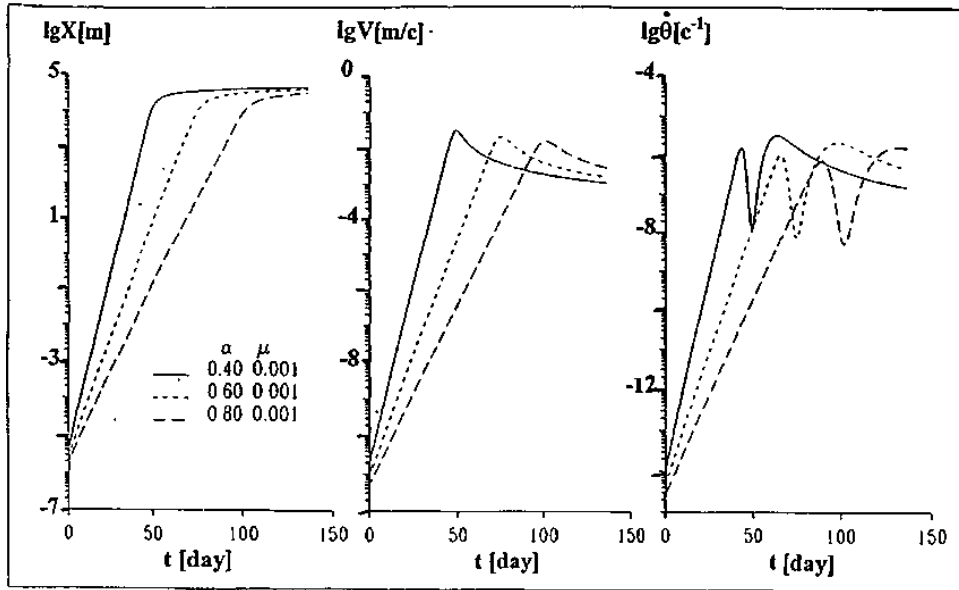


Рис. 1. Решения уравнения (3) для расстояния X , пройденного волной, величины ее скорости $V=dX/dt$ и величины угловой скорости поворота блока (скорости деформации) $\dot{\theta}=d\theta/dt$ при значениях параметров $\alpha \approx 0,4 - 0,8$ и $\mu \approx 10^{-3}$.

Видим, что зависимости $V(t)$ имеют точки, в которых скорость волны достигает своего максимального значения, после чего плавно выходит на асимптотику. Анализ показал, что для режима замедленного сейсмического процесса, при котором взаимодействие блоков (очагов землетрясений) между собой осуществляется в основном за счет медленных движений — крипа, асимптотическое значение скорости передачи ротационных деформаций составляет $c_0 \approx 1 - 10$ см/с [2].

Интервалы времени, в течение которых форшоки и афтершоки происходят относительно сильнейших толчков, соотносятся в пропорции $\Delta t_a/\Delta t_\phi = 69/11 = 6,3$ [3], близкой к отношению продолжительностей максимумов скорости деформации $\dot{\theta}$ $\Delta t_{\theta_{\max 2}}/\Delta t_{\theta_{\max 1}} = 6 \pm 2$. В то же время, при близости значений магнитуд наиболее сильных форшоков и афтершоков: $M_\phi \approx M_a$, их числа N_a и N_ϕ , а, следовательно, и суммарные сейсмические энергии E_a и E_ϕ , выделяемые в течение форшоковой и афтершоковой стадий, соотносятся между собою в пропорции $N_a/N_\phi = E_a/E_\phi = 2,3$, близкой к отношению величин максимумов скоростей

деформации $\dot{\theta}_{\max 2} / \dot{\theta}_{\max 1} = 2 - 2,5$.

Интерпретация графика скорости деформации $\dot{\theta}$ может быть следующей. Особенностью взаимодействия сейсмофокальных блоков, по сути, является перераспределение и высвобождение накопленных напряжений при землетрясении, которое происходит в результате локализации неустойчивой деформации в определенный момент времени (минимум на графике $\dot{\theta}$). В рамках такого подхода, первой и второй стадиям взаимодействия тектонической волны с сейсмофокальным блоком (первый и второй максимумы на кривой $\dot{\theta}$) могут соответствовать форшоковая и афтершоковая стадии сейсмического цикла.

Таким образом, ротационная модель позволяет количественно описать такие важные свойства сейсмического процесса, как его форшоковую и афтершоковую стадии и заключенную между ними «особенность» – сильнейшее землетрясение.

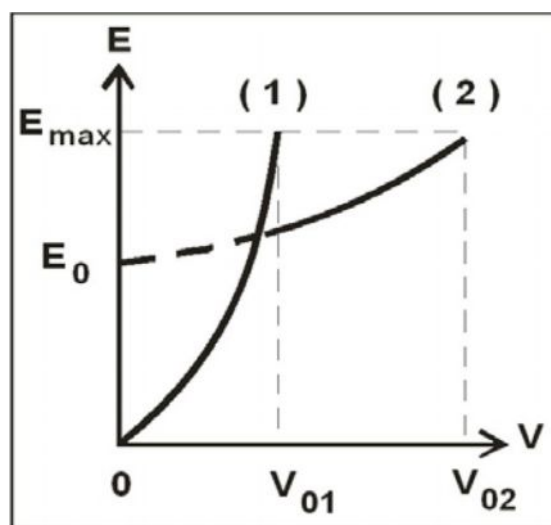


Рис. 2. Волновые решения $E(V)$ СГ-уравнения [6]: 1 — солитоны; 2 — экситоны. V_{01} , V_{02} — характерные скорости процесса, соответствующие “предельным” энергиям $E = E_{\max}$.

Уравнение синус-Гордона имеет много решений. Моделируя движения в длинных молекулярных цепях, А.С. Давыдов показал [6], что волновые движения в таких цепях описываются двумя типами возбуждений: солитонами и экситонами (в смысле [6]) (рис. 2).

Характерными для таких решений являются “предельные” скорости, соответствующие максимальным энергиям возбуждения $E_{\max} : V_{01}$ и V_{02} .

Справедливы следующие соотношения: $0 \leq E \leq E_{\max}$, $0 \leq V \leq V_{01}$ для солитонного решения и $0 \leq E_0 \leq E \leq E_{\max}$, $V_{01} \leq V \leq V_{02}$ для экситонного. E_{\max} – максимальное значение энергии, соответствующее наибольшим значениям магнитуд землетрясений; E_0 – значение энергии, соответствующее коллективному возбуждению всей совокупности молекул в цепочке (т.е. очагов землетрясений в сейсмическом поясе в геосреде), как целой, остающейся неподвижной, со скоростью $V = 0$.

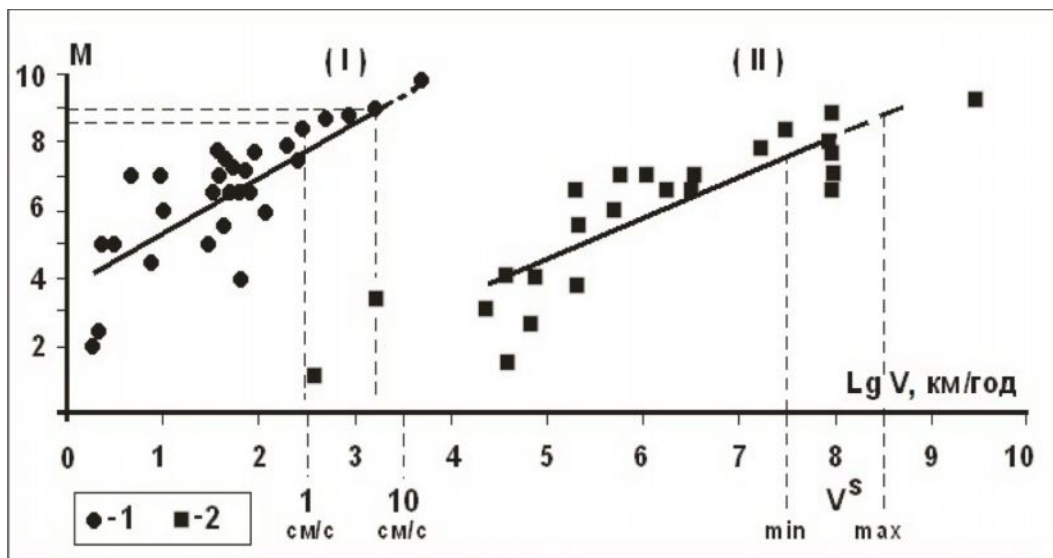


Рис. 3. Значения скоростей глобальной (1 — вдоль всей окраины) и локальной (2 — в пределах индивидуальных очагов сильных землетрясений) миграций тихоокеанских землетрясений как функции их магнитуды M [1]: I, II — глобальная и локальная зависимости $M(LgV)$ соответственно, определенные методом средних квадратов; V_s — скорость сейсмических волн.

По данным о скорости миграции очагов тихоокеанских землетрясений с глубинами гипоцентров менее 100 км, опубликованным в [1], глобальная (вдоль окраины Тихого океана) и локальная (в очагах индивидуальных землетрясений) миграционные зависимости, предельные значения скоростей и соответствующие им наибольшие магнитуды составляют (рис. 3):

$$M_1 \approx 2 \lg V_1, V_{1,\max} \approx 1-10 \text{ см/с}, M_{1,\max} = 8,5-9, \quad (4)$$

$$M_2 \approx \lg V_2, V_{2,\max} \approx 4-8 \text{ км/с}, M_{2,\max} = 8,3. \quad (5)$$

Показано [4], что теоретические модельные для молекулярных цепей и экспериментальные миграционные для цепочек очагов землетрясений зависимости качественно совпадают между собой. Это позволяет интерпретировать экспериментальные миграционные зависимости (4) и (5) как солитонное и экситонное решения СГ уравнения, имеющие характерные предельные скорости $V_{01} = V_{1,\max}$ и $V_{02} = V_{2,\max}$. При этом предельное значение скорости миграции $V_{1,\max} \approx 1-10$ см/с совпадает с характерной скоростью c_0 , полученной в рамках ротационной блоковой модели геосреды, что дает возможность интерпретировать последнюю как предельную скорость солитонного решения уравнения синус-Гордона V_{01} .

Известно, что солитонные решения СГ-уравнения характеризуются рядом важных свойств, соответствующих свойствам реальных элементарных частиц [5], в то время как экситоны являются такими возмущениями, которые в линейном приближении вырождаются в обычные волны [6], в нашем случае — в продольные (Р) и поперечные (S) сейсмические (s) волны V^s . Поэтому выявленные в рамках ротационной модели солитонное V_{01} (4) и экситонное V_{02} (5) решения с характерными предельными скоростями:

$$V_{1,\max} \approx V_{01} \approx c_0, V_{2,\max} \approx V_{02} \approx V^s, \quad (6)$$

по сути, являются новым типом упругих волн в твердых телах — ротационными волнами [1, 4], которые представляют собой уединенные волны, поляризованные перпендикулярно к направлению распространения [2].

В работе [4] показано, что в рамках ротационной модели взаимодействие между блоками имеет своеобразный корпускулярно-волновой характер и осуществляется двумя способами. Во-первых, близкодействием — путем обмена моментами рядом расположенных

блоков, а не за счет (как в моментной теории упругости) трения вдоль их границ, которое в рамках ротационной модели препятствует взаимодействию блоков. В качестве примеров такого взаимодействия можно привести сильнейшие землетрясения-дуплеты (и мультиплеты) с близкорасположенными очагами, при которых кроме сильных сотрясений на обширных участках поверхности Земли всегда возбуждаются интенсивные собственные колебания планеты. Во-вторых, дальнодействием — путем обмена энергиями между блоками на больших (много больше размера блока) расстояниях. Примеры такого взаимодействия в сейсмологии также широко известны — это “миграция” очагов землетрясений вдоль сейсмических поясов на многие десятки тысяч километров, удаленные форшоки и афтершоки и пары землетрясений.

1.2 В процессе исследования миграции сейсмической и вулканической активности в пределах трех наиболее геодинамически активных поясов планеты (окраина Тихого океана, Альпийско-Гималайский пояс и Срединно-Атлантический хребет) был выявлен параметр p , чувствительный к геодинамическим обстановкам в регионах: $p_+ > 0$ для областей сжатия и $p_- < 0$ для областей растяжения [11]. Оказалось, что $p_+ + p_- \rightarrow 0$, что наделяет параметр p свойствами, близкими свойствам сохраняющейся векторной величины. В рамках ротационного моделирования геодинамического процесса, протекающего в блоковой среде, сохраняющемуся векторному параметру p может быть придан смысл момента. Тогда исходное уравнение (1) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \operatorname{sgn}(p) \cdot \sin \theta. \quad (7)$$

Полученное уравнение (7) является дальнейшим развитием ротационной модели движения блоковой геосреды, отвечающим закону сохранения момента и позволяющим описывать закономерности сейсмической и вулканической активности во всем их многообразии.

2. В течение геологических отрезков времени (миллион лет и более) «твердая» Земля с достаточно хорошим приближением может рассматриваться как текучая среда, по свойствам близкая к жидкости. Тогда в «геологическом» приближении, когда геосреда имеет реидные (невязкие) свойства, можно наметить другой путь аналитического изучения закономерностей ее движения. А именно: в рамках известной задачи Дирихле (1860) о вращающемся объеме гравитирующей невязкой жидкости, сохраняющем свою эллиптическую форму. В классическом виде эта задача сформулирована следующим образом [1]: *«Дана однородная несжимаемая масса гравитирующей жидкости. Допускают ли законы гидродинамики такое движение этой массы, чтобы ее форма в любой момент оставалась эллипсоидальной, а поле скоростей жидкости – линейным по координатам?»*

Геологическим проявлением таких движений могут являться, например, вихревые структуры земной коры, впервые описанные в 1928 году Ли Сыгуаном. Важные результаты, доказывающие существование во вращающихся реальных системах, включая планеты и звезды, внутренних движений «вихревой» природы, были получены Б. Риманом (1866), Чандрасекхаром (1983), Б.П. Кондратьевым (2003) и др. [1]

В качестве примера на рис. 4 приведен результат одного из инструментальных геодезических наблюдений из работы геофизика Т. Рикитаке [8], на котором отчетливо видна «вихревая» структура векторов смещения триангуляционных пунктов.

Проблема вихревых геологических структур в работах геологического профиля только затрагивается; полностью отсутствуют работы, в которых было бы приведено достаточно полное описание всего спектра наблюдаемых на поверхности Земли вихревых структур с указанием их пространственных и временных параметров. Никем до сих пор не создан каталог вихревых структур, пригодный для анализа,

например, статистического. В геофизических же работах проблема вихревых структур, вообще говоря, практически не обсуждается.



Рис. 4. Векторное изображение смещений триангуляционных пунктов I класса, полученных в результате двух периодов наблюдений в конце XIX - начале XX вв. и в середине XX в., отстоящих друг от друга приблизительно на 60 лет [8].

Мы полагаем, что вихревые геологические структуры могут являться решениями проблемы Дирихле–Римана, которые на поверхности земной коры могут проявляться в виде течений вихревой формы.

Это направление исследований может рассматриваться совместно с представлениями нелинейной физической акустики, в которой трансляционные движения среды могут являться следствием ее нелинейных свойств в результате радиационного давления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Таким образом, моделирование геодинамических движений, протекающих в блоковой геологической среде, может быть сведено к решению задач 1-2, аналитическое содержание которых выше представлено уравнениями синус-Гордона (1), (3), (7) и задачей Дирихле-Римана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Викулин А.В. Сейсмичность. Вулканизм. Геодинамика: сб. тр. Петропавловск-Камчатский: КамГУ, 2011. 407 с.
2. Викулин А.В., Быков В.Г., Лунева М.Н. Нелинейные волны деформации в ротационной модели сейсмического процесса // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5. № 1. С. 31-39.
3. Викулин А.В., Викулина С.А., Митякин В.П. Сценарий возможного сейсмического воздействия на Петропавловск-Камчатский в результате катастрофического землетрясения. М.: ИЛ АН СССР. 1991. 55 с.
4. Викулин А.В., Иванчин А.Г. О современной концепции блочно-иерархического строения геосреды и некоторых ее следствиях в области наук о Земле // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых (ФТПРПИ). 2013. № 3. С. 67-84.
5. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Л.И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // Успехи физ. наук. 1979. Т. 128. Вып. 4.
6. Давыдов А.С. Солитоны в квазиодномерных молекулярных структурах // Успехи физ. наук. 1982. Т. 138. Вып. 4. С. 579-624.
7. Мелекесцев И.В. Вихревая вулканическая гипотеза и некоторые перспективы ее применения // Проблемы глубинного вулканизма. М.: Наука. 1979. С.125-155.
8. Рикитаке Т. Геофизические и геологические данные о Японской островной дуге и ее обрамлении // Окраины континентов и сотровные дуги. М.: Мир. 1970. С.216-236.
9. Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М. Основы геомеханики. М.: Недра. 1986. 301 с.
10. England P., Molnar P. The field of crustal velocity in Asia calculated from Quaternary rates of slip on faults // Geophys. J. Int.. 1997. 130. N 3. P.551-582.
11. Vikulin A.V., Akmanova D.R., Vikulina S.A., Dolgaya A.A. Migration of seismic and volcanic activity as display of wave geodynamic process // Geodynamics & Tectonophysics. 2012. V. 3. № 1. P. 1-18. DOI:10.5800/GT-2012-3-1-0058

MATHEMATICAL MODELING OF ROTATIONAL MOTION
IN BLOCK GEOMEDIUM

Gerus A.I.

The paper describes two different approaches to modeling the rotational motion in Earth's crust: a geophysical approach (hundreds-thousands years scale) which implies the idea of a solid block structure of the crust and a geological approach (a million years or longer) in which the Earth's crust appears to be liquid. The relevant mathematical models, numerical results and their interpretation are given.

Keywords: block geomedium, rotation model, sine-Gordon equation, vortex structures, Dirichlet-Riemann problem.