

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН ДИЛАТАНСИИ В ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ ДВОЙНЫХ СИЛ

Боброва М.Е. (аспирант)

Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

Научный руководитель: к. ф.-м. н. Пережогин А.С.

Рассмотрена модель образования зон дилатансии в поле напряжений двойных сил в однородном изотропном упругом полупространстве. При моделировании поля напряжений использованы аналитические решения для упругих смещений и напряжений, удовлетворяющие условиям суперпозиции точечных источников и отсутствия напряжений на свободной границе. Выполнены расчеты компонент тензора напряжений и критерия дилатансии. Произведена визуализация результатов моделирования.

Ключевые слова: зона дилатансии, задача Миндлина, теория упругости.

Введение

В сейсмоактивных зонах тектонические силы, возникающие на стыке блоков земной коры, формируют области повышенных тектонических напряжений, в которых процессы раскрытия трещин могут приводить к разрушению среды. Такие изменения в состоянии горных пород обычно связываются с нелинейным разуплотнением среды за счет образования трещин сдвига при достижении касательных напряжений некоторого порогового значения.

Поля напряжений и деформаций в земной коре влияют на процессы в различных геофизических полях. В частности, изменения уровня воды в скважинах, повышение интенсивности выделения почвенного радона, аномалии в геоакустических сигналах, электрическом и магнитном полях могут являться следствием изменения напряженно-деформированного состояния среды.

Физико-математической моделью, которая может связывать такие процессы, является модель образования зон дилатансии или разуплотнения горных пород за счет доминирования касательных напряжений над сжатием. В случае простой сосредоточенной силы образование зон дилатансии исследовано в работе [1]. В работе [3] проведено моделирование для случая действия двойной силы, направленной параллельно свободной границе.

В настоящей работе рассматривается пространственное распределение зон дилатансии для комбинации трех двойных сил, описывающих точечный центр расширения [5]. Обнаружено, что в зависимости от параметров точечного источника может происходить образование двух зон дилатансии: «очаговой» в окрестностях источника и «пограничной» около свободной поверхности. Исследовано поведение «пограничной» зоны при изменении интенсивности двойных сил и глубины источника напряжений.

Постановка задачи

Рассмотрим модель земной коры в приближении упругого однородного изотропного полупространства. Полупространство совпадает с положительным направлением оси OZ (рис. 1). Тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} и вектор смещения u_i удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad (1)$$

где X_i – двойные силы.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; λ, μ – коэффициенты Ламэ. Граничным условием является свободная от напряжений граница $z=0$.
 $\sigma_{zx}|_{z=0} = \sigma_{zy}|_{z=0} = \sigma_{zz}|_{z=0} = 0$.

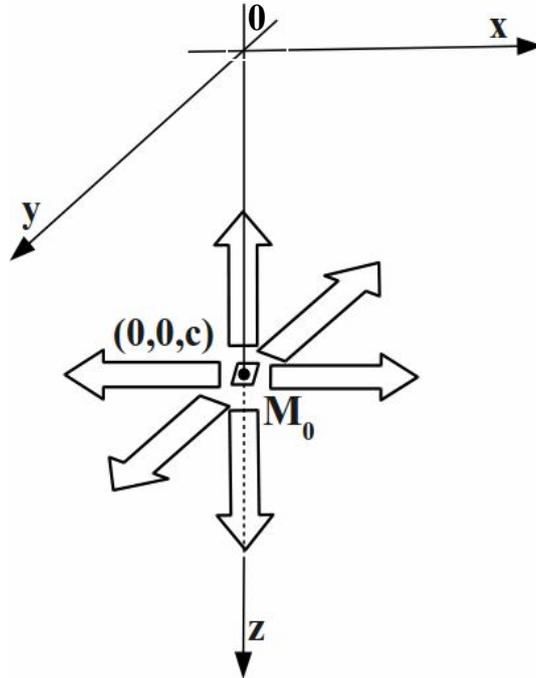


Рис. 1. Направление действия двойных сил X_i в однородном изотропном полупространстве. M_0 - интенсивность двойных сил.

Источник в виде комбинации трех двойных сил помещен в точку c на оси OZ (рис. 1). Интенсивность действия двойных сил одинакова для каждой из них. Общая интенсивность равна M_0 .

Для нахождения поля напряжений можно воспользоваться представлением Галеркина. Компоненты тензора напряжений в упругом изотропном полупространстве могут быть выражены через частные производные вектора Галеркина [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \Delta X + (\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \text{div} H \\ \sigma_{yy} &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} \Delta Y + (\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \text{div} H \\ \sigma_{zz} &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \Delta Z + (\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \text{div} H \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yz} &= (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta Y + \frac{\partial}{\partial y}\Delta Z\right) - \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\operatorname{div}H \\ \sigma_{zx} &= (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta Z + \frac{\partial}{\partial z}\Delta X\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\operatorname{div}H, \\ \sigma_{xy} &= (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial y}\Delta X + \frac{\partial}{\partial x}\Delta Y\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\operatorname{div}H\end{aligned}$$

где X, Y, Z – координаты вектора Галеркина \mathbf{H} ; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений; Δ – оператор Лапласа, ν – коэффициент Пуассона.

С использованием (4) и суммы векторов Галеркина для двойных сил без момента [4] получены явные решения для тензора напряжений с помощью пакета аналитических вычислений Maxima [7].

В работе [1] предложен критерий для возникновения зон дилатансии:

$$D_\tau = \tau - \alpha(P + \rho gz) - Y \geq 0, \quad (5)$$

где
$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} \left((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right)^{\frac{1}{2}} -$$

интенсивность касательных напряжений, $P = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$ – давление, α – коэффициент внутреннего трения, ρ – плотность породы, g – ускорение свободного падения, z – координата точки, Y – сцепление породы.

В зонах, где $D_\tau \geq 0$, касательные напряжения доминируют над сжимающими напряжениями, и развивается дилатансия. Те зоны, где $D_\tau < 0$, являются зонами без нелинейного разуплотнения среды.

Численное моделирование

В случаях действия простой силы и двойных сил происходит образование двух зон дилатансии - «очаговой» в окрестностях приложения силы и «пограничной» в слое около свободной поверхности [1, 3]. Исследуем формирование зон дилатансии в зависимости от глубины и интенсивности рассматриваемого сосредоточенного источника.

Для того, чтобы представить форму зоны дилатансии, необходимо рассмотреть соответствующие сечения трехмерной области. На рис. 2 приведены результаты моделирования зон дилатансии по формуле (5) для источника с интенсивностью $M_0=5 \cdot 10^{20}$ Н·м на глубине $c=10050$ м. Использовались следующие параметры земной коры: $\nu=0.25$, $\lambda=3.48 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu=3.48 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho=2900$ кг/м³, $g=9.8$ м/с², $Y=3 \cdot 10^6$ Па, $\alpha=0.5$. Визуализация результатов моделирования выполнена с помощью пакета построения графиков gnuplot [6]. В связи с симметричностью решений сечение по ОУ (рис. 1) будет выглядеть аналогично. На рис. 2а видно, что «очаговая» зона дилатансии соединяется с «пограничной». Для заданной интенсивности и глубины источника размер области дилатансии на поверхности Земли составляет десятки километров.

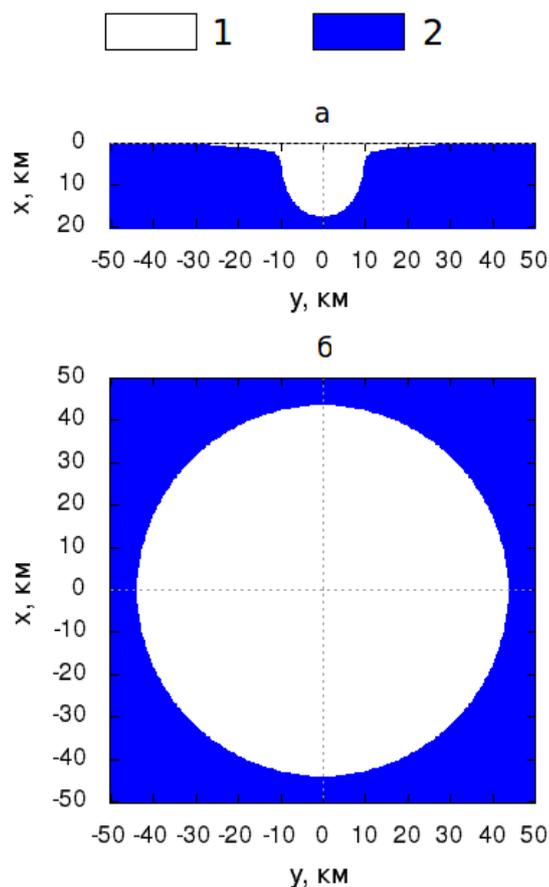


Рис. 2. Зона дилатансии в сечении $x=0$ (а) и на свободной поверхности $z=0$ (б). 1 - зона дилатансии, 2 - область без нелинейного разуплотнения среды.

На рис. 3 приведены результаты моделирования зон дилатансии по формуле (5) для источника с интенсивностью $M_0=5 \cdot 10^{20}$ Н·м на глубине $c=15050$ м. В этом случае «очаговая» зона дилатансии не соединяется с поверхностью. При этом на поверхности происходит образование «пограничной» зоны дилатансии. С увеличением глубины источника «пограничная» область пропадает.

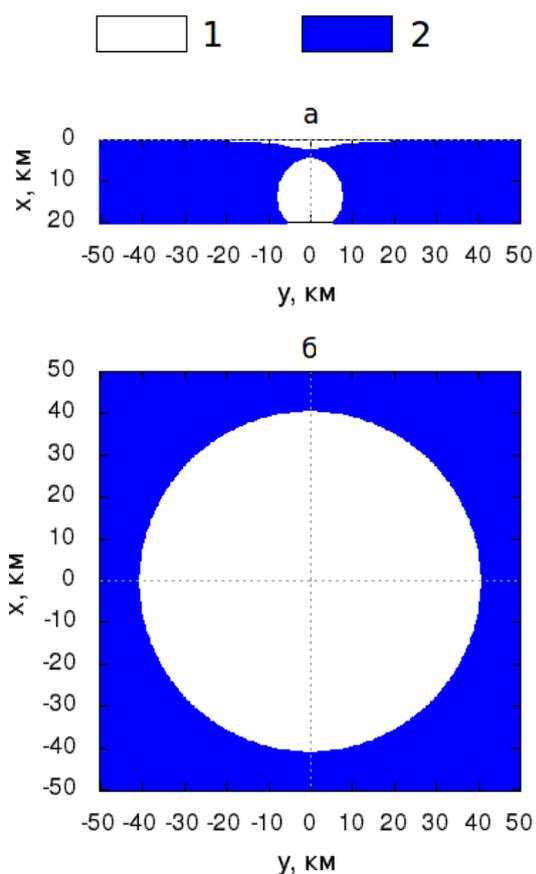


Рис. 3. Зона дилатансии. а - в сечении $x=0$; б - на свободной поверхности $z=0$. 1 - зона дилатансии, 2 - область без нелинейного разуплотнения среды.

На рис. 4 приведены результаты моделирования зон дилатансии по формуле (5) на глубине $c=10050$ м при $M_0=5 \cdot 10^{19}$ Н·м. В этом случае зона дилатансии находится в области источника напряжений. Размер «пограничной» зоны незначительно отличается от размера «очаговой» зоны.

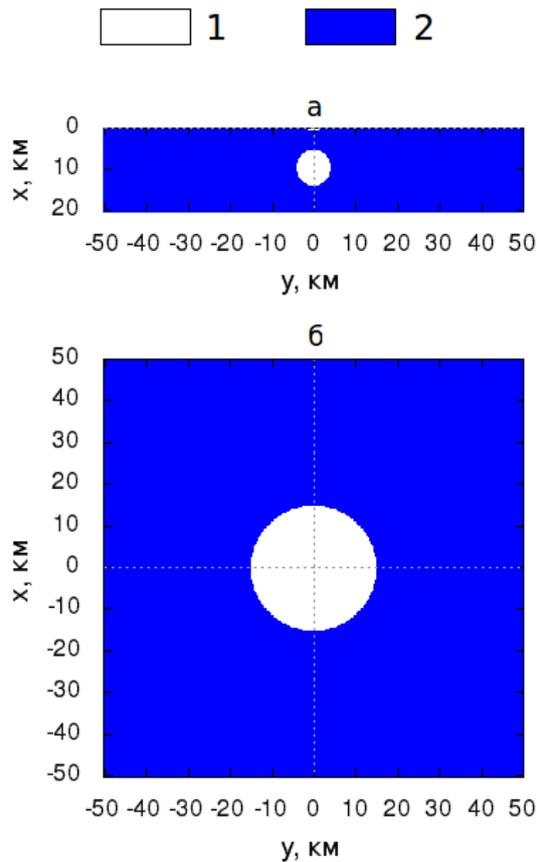


Рис. 4. Зона дилатансии в сечении $x=0$ (а) и на свободной поверхности $z=0$ (б). 1 - зона дилатансии, 2 - область без нелинейного разуплотнения среды.

Заключение

Показано наличие области дилатансии на поверхности Земли для случая действия трех двойных сил. Протяженность «пограничной» зоны дилатансии в зависимости от интенсивности и глубины источника может составлять до десятков километров. «Пограничная» и «очаговая» зоны дилатансии могут соединяться между собой или не соединяться в зависимости от параметров модели. При этом связь между размерами зон дилатансии и параметрами модели - глубиной и интенсивностью источника, является нелинейной. При незначительном изменении этих параметров области нелинейного разуплотнения в приповерхностном слое земной коры могут не возникать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А.С., Белоносов А.С., Петренко В.Е. О концепции многодисциплинарного прогноза землетрясений с использованием интегрального предвестника // Вычислительная сейсмология. Вып. 32. 2001. С. 6-13.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. С. 180-302.
3. Пережогин А.С., Шевцов Б.М. Модели напряженно-деформированного состояния горных пород при подготовке землетрясений и их связь с геоакустическими наблюдениями // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14. № 3. С. 48-58.
4. Mindlin R.D., Cheng D.H. Nuclei of Strain in the Semi-Infinite Solid. // Journal of Applied Physics. 1950. V. 21. P. 926-930.
5. Okada Y. Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space // Bulletin of the Seismological Society of America. 1992. V. 82. No. 2. P. 1018-1040.
6. <http://www.gnuplot.info>
7. [http : //maxima.sourceforge.net/ru](http://maxima.sourceforge.net/ru)

**MODELING OF DILATANCY'S ZONES
IN THE STRESS FIELD OF DOUBLE FORCES.**

Bobrova M.E.

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation FEBRAS

A model of the dilatancy's zones in the stress field of the double forces in a homogeneous, isotropic elastic half-space was considered. Analytical solutions for the elastic displacements and stresses from the superposition of point sources were used to simulate the stress field. It satisfied the conditions of lack of stress on the free boundary. Calculations of the stress tensor components and the criterion of dilatancy were performed. Visualization of simulation results was made.

Key words: dilatancy, the problem of Mindlin, theory of elasticity.