УДК 550.38

МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ГЕНЕРИРУЕМЫЕ ОБЪЕМНЫМИ ТОКАМИ В ШАРОВОЙ ОБЛАСТИ

Крутьева Л.К.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Водинчар Г.М.

Построена модель генерации магнитного поля объемными токами, заполняющими ядро. Разработан алгоритм вычисления магнитного поля, порождаемого одним базисным током, в любой точке поверхности. Представлена программная реализация этого алгоритма.

Известно разложение геомагнитного поля на поверхности Земли по сферическим функциям (ряд Гаусса). Коэффициенты этого разложения вычисляются каждые пять лет путем минимизации среднеквадратической невязки между модельным и наблюдаемым полем в точках расположения обсерваторий и публикуются в научной печати и на сайтах мировых центров геофизических данных (напр. http://swdcwww.kugi.kyoto-u.ac.jp/igrf/index.html). В результате получается так называемая стандартная модель геомагнитного поля.

Ряд Гаусса является чисто математической моделью, и в его основе нет физических предположений о природе и структуре токов, формирующих магнитное поле. Предполагается лишь то, что источники геомагнитного поля находятся внутри земного шара и тогда на поверхности поле имеет потенциальный характер.

Работы по подбору токовых структур делались (напр. [2],[4]), в этих работах рассматривались системы линейных токов. Более естественным выглядит предположение об объемном распределении токов.

В настоящем докладе рассматривается модель генерации магнитного поля такими токами, заполняющими ядро.

Предполагается, что за пределы ядра токи не проникают. Решается задача нахождения базисных токовых структур, суперпозиция которых может генерировать поле. Решение сложной магнитогидродинамической задачи взаимодействия конвекции и токовых структур авторами не рассматривается. Не рассматривается и вопрос о физическом механизме появления токовых структур.

Будем считать, что $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ при $r \geq R_C$, где R_C - радиус ядра. Тогда магнитное поле задается выражением [1]:

$$\frac{\mu\mu_o}{4\pi} \iiint\limits_{r' \leq R_C} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r'}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r'}\|^3} dV = \mathbf{B}(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где интегрирование ведется по объему ядра. $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ - ищется в пространстве соленоидальных полей и удовлетворяют однородным краевым условиям. В правой части – референтное магнитное поле.

С математической точки зрения восстановление плотности тока является решением интегрального уравнения Фредгольма. Общее решение этого уравнения неизвестно, поэтому строится приближенное решение спектральным методом.

Одним из вариантов этого метода является разложение решения по какой-либо полной системе функций. В качестве такой системной функции выбрана система собственных полей оператора Лапласа в соответствующем гильбертовом пространстве. Уравнение Фредгольма является некорректной задачей. Поэтому, в качестве варианта регуляризации, решение ищется путем минимизации функционала невязки между левой и правой частями уравнения (1).

$$\oiint\limits_{r=R_E}\left[\frac{\mu\mu_o}{4\pi}\sum_{s}\alpha_k\iiint\limits_{r'\le R_C}\frac{\mathbf{j}_s(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}dV-\mathbf{B}_2\right]^2 d\sigma \qquad (2)$$

где $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}')$ - базисные токи, α_k - их интенсивности.

Известно, что пространство соленоидальных полей разлагается в ортогональную систему подпространств, состоящих из тороидальных и полоидальных полей. Тогда достаточно ограничиться выбором базисных тороидальных и полоидальных полей. Эти базисные моды имеют вид ${}_k\mathbf{T}_n^m = \mathrm{rot}\left(R_{kn}^T Y_n^m \mathbf{r}\right)$ и ${}_k\mathbf{P}_n^m = \mathrm{rotrot}\left(R_{kn}^P Y_n^m \mathbf{r}\right)$, где $Y_n^m(\theta,\varphi)$ – сферические гармоники, а радиальные $R_{kn}^T = A_{kn} j_n\left(\sqrt{-\lambda_{kn}}\,r\right)+B_{kn} y_n\left(\sqrt{-\lambda_{kn}}\,r\right)$, где $j_n(\cdot)$ и $y_n(\cdot)$ – сферические функции Бесселя, λ_{kn} – собственные значения оператора Лапласа. Некоторые линии тока тороидальных и полоидальных мод изображены на рис.1.

В работе [3] доказана полнота базиса образованного компонентами аналогичными ${}_k\mathbf{T}_n^m$ и ${}_k\mathbf{P}_n^m$ в шаровом слое. Разумно предположить, что эта полнота сохранится и при предельном переходе, когда внутренний радиус слоя стремится к нулю. Это будет соответствовать ситуации, рассматриваемой в настоящем докладе. Однако детально этот вопрос авторами не исследовался.

Для решения задачи проведен численный расчет некоторых тороидальных и полоидальных полей в объеме ядра с шагом в 2 градуса по широте и долготе и 30 точек по радиусу. Для этого разрабатывалось соответствующее программное обеспечение. Для обеспечения повышенной точности вычисления полей, содержащих большое количество трансцендентных функций, в расчетах использовался пакет Maple12. Точность вычислений составила 30 знаков после запятой.

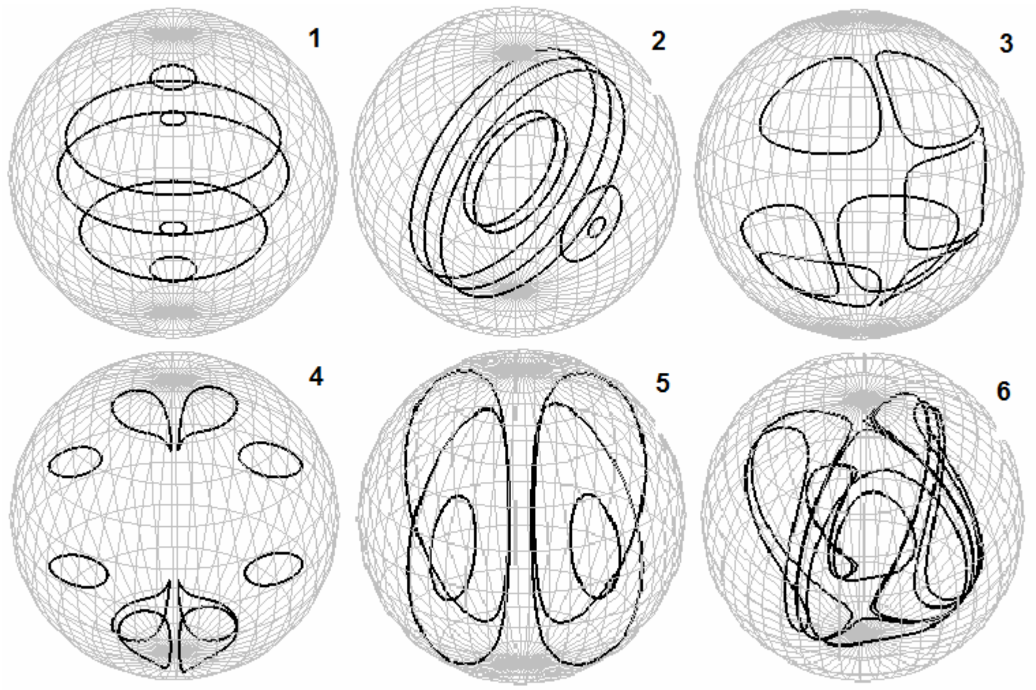

Рис. 1. Линии тока тороидальных и полоидальных мод:
1 - ${}_0\mathbf{T}_1^0$; 2 - ${}_0\mathbf{T}_1^1$; 3 - ${}_0\mathbf{T}_{-2}^4$; 4 - ${}_0\mathbf{P}_2^4$; 5 - ${}_0\mathbf{P}_1^0$; 6 - ${}_0\mathbf{T}_2^2$.

В настоящее время ведутся работы по отбору большого числа базисных мод, которые могут описать основные черты морфологии поля. Предполагается, что рассмотренная модель источника поля в виде объемных токов может быть естественным образом согласована с гидродинамическими токами в жидком ядре Земли в рамках динамо-моделей.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. 621 с.
2. Ляхов Б.М. Главное магнитное поле Земли // Геомагн. и Аэрон. 1963. Т.3. No 4. С.734-736.
3. Резников Е.Л., Розенкноп Л.М. О собственных колебаниях вращающейся вязкой жидкости во внешнем ядре Земли // Вопросы геодинамики и сейсмологии. Вычисл. сейсмология. Вып. 30. М.: Геос. 1998. С. 121-132.
4. Peddie, N.V. Current Loop Models of the Earth’s Magnetic Field // J. Geoph. Res. 1979. V.84. No.B9. P.4517-4523,

MAGNETIC FIELDS GENERATED BY BULK CURRENT IN SPHERICAL AREA

Krutyeva L.K.

Model of the magnetic field generated by bulk current which fills the core was made. The calculation algorithm of the magnetic field which is generated by one basic current at any point of the surface was formulated. Programmed realization of this algorithm was given.