

РЕЖИМЫ ПЕРЕНОСА РАДОНА ВО ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЕ СО СТОКОМ В ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

Паровик Р.И.

Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН.

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Шевцов Б.М.

Рассмотрена модель эманации радона из горных пород в атмосферу с учетом фрактальных свойств геологической среды. Рассмотрены режимы супердиффузии и аномальной адвекции. Получены аналитические решения. Проведено их сравнение с результатами классической модели. Обсуждаются особенности смены режимов переноса радона. Показано, к каким потокам радона могут приводить деформационные изменения в породах.

Введение

Радон является эффективным индикатором напряженно-деформированного состояния геологической среды, а его перенос – одним из геодинамических процессов, происходящих в земной коре. Кроме того радон – хороший ионизатор и поэтому оказывает влияние на проводимость воздуха и формирование электрического поля приземной атмосферы.

Изучением переноса радона в геологических средах занимаются сравнительно давно. Такие исследования проводились под руководством А.Г. Граммакова и Ю.П. Булашевича и, как правило, были направлены на разведку урановых руд. В ходе данных исследований были разработаны математические модели, которые легли в основу теории эманационного метода поиска полезных ископаемых [2,3,12]. Однако эти модели строились в предположении о том, что перенос радона осуществляется за счет процессов обычной диффузии в однородных пористых средах. Так, например, в рамках этого подхода была рассмотрена задача стока радона в атмосферу [13,14].

Но пористые среды обладают, как правило, фрактальными свойствами, наличие которых приводит к процессам аномальной диффузии или адвекции, за счет которых увеличиваются интенсивность стока радона в приземную атмосферу [8,9,11,15,18].

Моделирование процесса переноса радона в естественных средах

Перенос радона в однородной пористой среде без фрактальных свойств описывается уравнением обычной диффузии и адвекции [3,12]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + v \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \lambda u(x,t) + Q/\eta, \quad (1)$$

где D – коэффициент молекулярной диффузии радона в поровой среде, m^2/c ; Q – интенсивность объемных источников, $кБк/м^3c$; $u(x)$ – поровая активность радона, $кБк/м^3$; η – коэффициент пористости среды, $0 < \eta < 1$; v – скорость адвекции в порах, $м/с$; λ – постоянная распада радона, $1/c$. Поры предполагаются открытыми, т. е. соединенными между собой, что обеспечивает диффузию.

Соотношение (1) следует из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -\lambda u(x,t) + Q/\eta, \quad (2)$$

и закона Фика:

$$q(x,t) = -D\eta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + v\eta u(x,t). \quad (3)$$

Скорость адвекции в порах представима в виде: $v = \bar{v} + \delta v$, где первое слагаемое – среднее значение скорости, а второе – ее флуктуации. В случае отсутствия регулярной адвекции, которая обычно связана с эффузией или конвекцией, $\bar{v} = 0$. В случае стохастической адвекции усреднение по случайному полю скоростей δv приводит к диффузионному уравнению (1) для средней концентрации радона, но с другим коэффициентом D , который зависит от интенсивности флуктуаций скорости δv [6,5]. Эффекты, связанные с перечисленными типами адвекции, рассматриваться не будут.

Если среда, в которой происходит перенос радона, обладает фрактальными свойствами, то тогда закон Фика будет выглядеть следующим образом [19]:

$$q(x,t) = -D\eta \frac{\partial^{\alpha-1} u(x,t)}{\partial x^{\alpha-1}}, \quad (4)$$

где показатель дробности производной α , зависящий от фрактальной размерности геосреды [7], может меняться в пределах $0 < \alpha < 2$. Интервал $1 < \alpha < 2$ соответствует аномальной диффузии, $\alpha = 1$ – обычному переносу, а $0 < \alpha < 1$ – аномальной адвекции.

Надо отметить, что соотношение (4) может иметь и другую форму записи, учитывающую асимметрию производной относительно точки x , см., например, [19,21,22]. Это обобщение рассматриваться не будет.

При учете нелокальных эффектов по времени выражение (4) имеет более сложный вид [19]

$$q(x,t) = -D\eta \frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}} \frac{\partial^{\alpha-1} u(x,t)}{\partial x^{\alpha-1}},$$

где β – показатель дробности производной по времени, меняется в пределах $0 < \beta < 1$. Нелокальность по времени зависимости $q(x, t)$ от $u(x, t)$ связывают с прилипанием диффундирующих атомов к стенкам пор. Эти эффекты здесь рассматриваться не будут.

С учетом (2) и (4) уравнение диффузии радона во фрактальной среде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} - \lambda u(x, t) + Q/\eta. \quad (5)$$

При $\alpha = 2$ осуществляется переход к уравнению обычной диффузии (1). Ниже будем рассматривать стационарный процесс стока радона из грунта в приземный слой атмосферы, полагая в (4) $\partial u(x, t)/\partial t = 0$.

Рассмотрим стационарную диффузию радона в среде с фрактальными свойствами со стоком в приземную атмосферу. В этом случае уравнение (4) запишется в виде:

$$\begin{aligned} D_1 d_{0x}^\alpha u(x) - \lambda u(x) + Q/\eta &= 0, \quad x > 0, \\ D_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \lambda u(x) &= 0, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

А вместо граничных условий и будем иметь [10,16]:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} d_{0x}^{\alpha-2} u(x) = u(x)|_{x=0-0}, \quad D_1 \lim_{x \rightarrow 0+0} d_{0x}^{\alpha-1} u(x) = D_2 \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=0-0}, \quad (7)$$

а на внешних границах сред грунт-атмосфера – краевые условия:

$$u \rightarrow u_0 = \frac{Q}{\lambda \eta}, \quad x \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (8)$$

где d_{0x}^α – оператор Римана-Лиувилля производной дробного порядка α ($1 < \alpha < 2$), который действует по следующему правилу [20]:

$$d_{0x}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Решение модели (6,7,8) можно записать в терминах функции типа Миттаг-Леффлера [4]:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 \left[1 + \mu^{1-1/\alpha} \left(\sigma x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\mu x^\alpha) + x^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(\mu x^\alpha) \right) / (\mu^{1/\alpha} + \sigma) - E_\alpha(\mu x^\alpha) \right], \quad x > 0, \\ u(x) &= u_0 \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x) \mu^{1-1/\alpha} / (\mu^{1/\alpha} + \sigma), \quad x < 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где, $E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / \Gamma(\alpha k + 1)$ – специальная функция Миттаг-Леффлера, а

$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / \Gamma(\alpha k + \beta)$ – специальная функция типа Миттаг-Леффлера,

$$\mu = \lambda/D_1, \quad \sigma = \sqrt{\lambda D_2}/D_1.$$

Можно проверить, что при $\alpha=2$ и с учетом соотношений $E_{2,1}(\mu x^2) = \text{ch}(\sqrt{\mu}x)$ и

$E_{2,2}(\mu x^2) = \text{sh}(\sqrt{\mu}x)/\sqrt{\mu}x$, выражения (9) переходят в решения для классического

случая, переноса радона в однородной пористой среде:

$$u(x) = u_0 \left[1 - \sqrt{\lambda D_2} \exp(-\sqrt{\lambda/D_1} x) / (\sqrt{\lambda D_2} + \sqrt{\lambda D_1}) \right], \quad x > 0 \quad (10)$$

$$u(x) = u_0 \left[1 - \sqrt{\lambda D_2} / (\sqrt{\lambda D_2} + \sqrt{\lambda D_1}) \right] \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x), \quad x < 0.$$

Выше был рассмотрен случай $1 < \alpha < 2$. Однако возможен и другой диапазон изменения этого параметра, когда $0 < \alpha < 1$. В этом случае меняется тип уравнения в грунте, что соответствует переходу супердиффузии в аномальную адвекцию. При этом параметр D_1 будет играть роль скорости переноса радона.

Общее решение уравнения (6) будут иметь вид:

$$u(x) = Ax^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mu x^{\alpha}) + (Q/\lambda\eta) [1 - E_{\alpha}(\mu x^{\alpha})], \quad x > 0, \quad (11)$$

$$u(x) = A \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x), \quad x < 0,$$

где константа A находится из единственного в этом случае граничного условия

$\lim_{x \rightarrow 0+0} d_{0x}^{\alpha-1} u(x) = u(x)|_{x=0-0}$. Оно дает $A = u_0 \mu^{1-1/\alpha}$. Поэтому решение (11) окончательно

запишется так:

$$u(x) = u_0 \left[1 + \mu^{1-1/\alpha} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mu x^{\alpha}) - E_{\alpha}(\mu x^{\alpha}) \right], \quad x > 0, \quad (12)$$

$$u(x) = u_0 \mu^{1-1/\alpha} \exp(\sqrt{\lambda/D_2} x), \quad x < 0.$$

При значении $\alpha=1$ решения (12) перейдут в константу $u(x) = u_0$. Это означает, что происходит обычный перенос радона со скоростью D_1 .

Отметим, что в случае $0 < \alpha < 1$ в обобщенном законе Фика (4) поток радона выражается через его концентрацию с помощью оператора дробного интегрирования, а не дифференцирования, степень которого также связана с фрактальной размерностью среды [7,17]. Однако в этом случае в уравнении (5) появляется дополнительный фактор,

влияющий на изменение концентрации радона. Действительно, если рассмотреть предельный случай и положить $\alpha = 0$, то получим отсутствие переноса и рост или уменьшение концентрации радона в зависимости от соотношения параметров D_1 и λ . Таким образом, случай $0 < \alpha < 1$ описывает не только процесс переноса, но еще и дополнительное выделение радона в поровое пространство из поровых фрактальных структур.

Коэффициент диффузии D_1 зависит от заполнения пор, а D_2 – от турбулентности в атмосфере. Оба параметра могут меняться в пределах нескольких порядков [12], но есть сопоставимые их значения, когда поры заполнены воздухом, а атмосфера неподвижна. Чтобы не получалось сильных градиентов концентрации радона вблизи границы раздела сред грунт-атмосфера, используем при численном моделировании сопоставимые значения D_1 и D_2 . Значения параметров для численного расчета брались следующие [12]: $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6}$ 1/с, $D_1 = 5.5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $4 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $Q = 2.1 \cdot 10^{-6}$ 1/м³с.

Расчетные кривые построены относительно нормированных координат по пространству и по концентрации радона. В первом случае нормировка осуществлялась на длину диффузии $l = \sqrt{D_1/\lambda}$ в грунте, а во втором – на значение величины u_0 . В случае супердиффузии ($1 < \alpha < 2$) вблизи границы раздела сред распределения радона располагаются между кривыми $\alpha = 2$ и 1 (рис. 1). Первая из них соответствует обычной диффузии, а вторая – такой же адвекции. Однако вглубь среды линии перегруппировываются в обратный порядок и с уменьшением α расчетные кривые затягиваются, а это означает, что длина диффузии увеличивается, и радон легче проникает через пористый грунт.

Вычисления показывают, что в случае аномальной адвекции ($0 < \alpha < 1$) радон еще интенсивнее, чем при супердиффузии, выносится из фрактальной среде и концентрируется вблизи границы с атмосферой (рис.2). Данное накопление концентрации радона является следствием анизотропии геосреды [6,22]. Анизотропия геосреды связана с разрушением пород, которое возникает в результате геодинамических процессов. А это значит, что аномальная адвекция может объяснить выбросы радона в периоды сильных деформационных возмущений. Величина локального максимума определяется соотношением коэффициентов D_1 и D_2 .

Аномальную адвекцию, как отмечалось выше, можно объяснить переносом, сопровождающимся выделением радона из поровых фрактальных структур в поровое пространство. Однако каковы свойства этих структур, как они зависят от состояния

среды, и каким образом размерность фрактала связана с показателем дробности производной в уравнении переноса – эти вопросы требуют отдельных исследований.

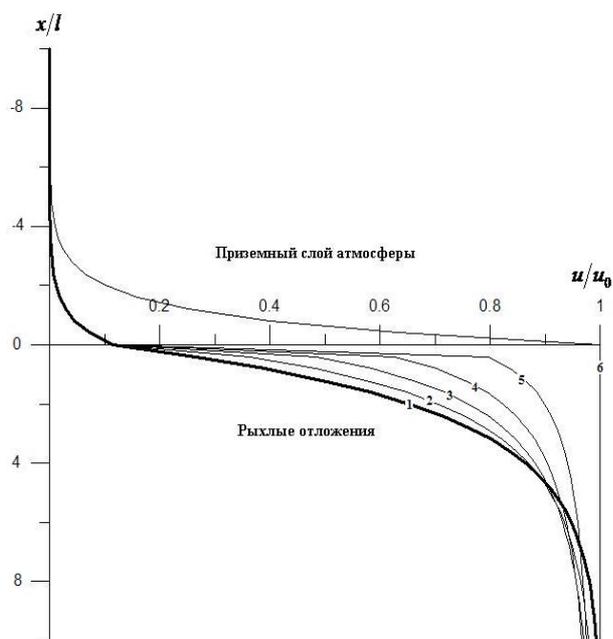


Рис. 1. Кривые концентрации радона в грунте и атмосфере в зависимости от параметра α : 2 (1); 1.8 (2); 1.6 (3); 1.4 (4); 1.2 (5); 1 (6).

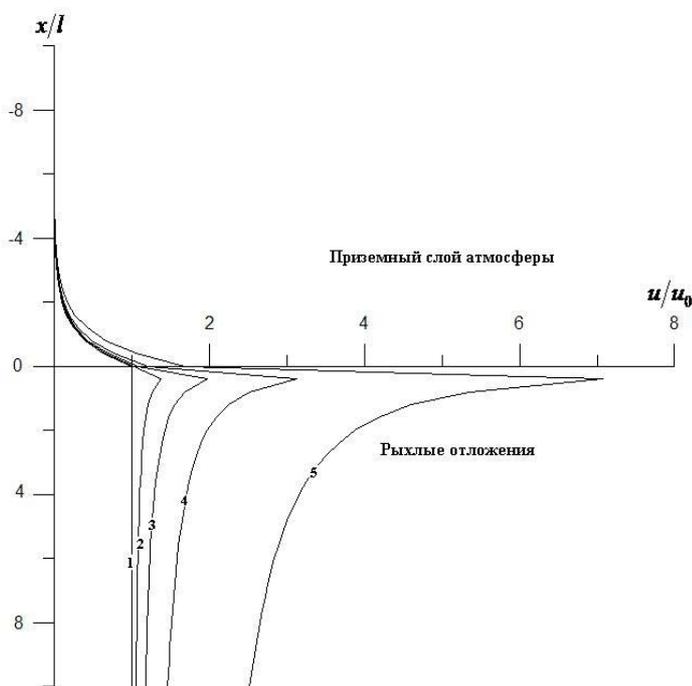


Рис. 2. Кривые распределения концентрации радона в грунте и атмосфере в зависимости от параметра α : 1 (1); 0.8 (2); 0.6 (3); 0.4 (4); 0.2 (5).

Благодарность. Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Шевцову Б. М. за конструктивное обсуждение полученных результатов и ценные замечания, которые послужили их лучшему осмыслению.

Литература

1. Большов Л. А., Дыхне А. М., Кондратенко Т. С. Аномальная диффузия и флуктуационные эффекты в сильно неупорядоченных средах // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 75. Вып. 5/6. С. 291-293.
2. Булашевич Ю.П., Хайретдинов Р.К. К теории диффузии эманации в пористых средах. // Известия АН СССР. Сер. геофизическая. 1959. № 12. С. 1787 – 1792.
3. Граммаков А.Г., Никонов А.И., Тарфеев Г.П. Радиометрические методы поисков и разведки урановых руд. М.: Госгеолтехиздат, 1957. 610 с.
4. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
5. Драников И.Л. Аномальная диффузия в простых физических моделях: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: ИПБРАЭ, 2007. 25 с.
6. Кляцкин В.И. Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках. М.: Физматлит, 2005. 160 с.
7. Кобелев Я.Л. Феноменологические методы описания больших систем с фрактальными структурами: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: УрГУ, 2001. 24 с.
8. Крылов С.С., Бобров Н. Ю. Фракталы в геофизике. СПб.: Издательство С-Пб. университета, 2004. 138 с.
9. Москалев П.В., Шитов В.В. Математическое моделирование пористых структур. М.: Физматлит, 2007. 120 с.
10. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
11. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.
12. Новиков Г.Ф., Капков Ю.Н. Радиоактивные методы разведки. М.: Недра, 1965. 750 с.
13. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Модель массопереноса радона (ОА ^{222}Rn) в приземном слое атмосферы // Вестник КРАУНЦ. Серия Науки о Земле. 2006 № 2. Вып. 8. С. 128-133.
14. Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Обобщенная одномерная модель массопереноса радона ^{222}Rn и его эксхалация в приземный слой атмосферы // Математическое моделирование. 2007. № 11. Т. 19. С. 43-50.
15. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
16. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
17. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М: Наука, 2007. 167 с.
18. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. М: Едиториал УРСС, 2002. 112 с.
19. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. 2003. Т.173. №8. С. 847-876.
20. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 с.
21. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. Т. 339. 2000. P. 1-77.
22. Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. Т. 371. 2002. P. 461–580.

THE MODES FOR TRANSFER OF RADON IN FRACTIONAL MEDIUM WITH DRAIN IN THE SURFACE LAYER OF THE ATMOSPHERE

Parovik R.I.

The model of flowing the radon from rocks with fractional properties in the atmosphere near the surface is offered. The modes of superdiffusion and anomalous advection are considered. They analytical decisions are received and are compared with results the classical model. Peculiarities of changing the modes transfer are discussed.