

Магнитуды, степенные распределения вероятностей и их применение в вулканологии**Иванов В.В.****Magnitudes, power-law probability distributions and their applications in volcanology****Ivanov V.V.***Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН, г. Петропавловск-Камчатский;**e-mail: victorvasilievich53@gmail.com*

Приводятся основные сведения о степенных распределениях вероятности, которые являются наиболее важным примером распределений с т.н. «тяжелыми хвостами» и о практических применениях таких распределений в вулканологии. Показаны примеры подобных распределений. Дан краткий обзор видов магнитуд в вулканологии.

Введение. К настоящему времени на Камчатке накоплен большой исходный материал по объемам взрывных вулканических отложений [3], который может быть использован для обоснованных статистических выводов о повторяемости извержений разной магнитуды. Магнитуда давно применяется в сейсмологии [2], но использование этого подхода в вулканологии пока явно недостаточно. Целью работы является математически правильное и, в то же время, доступное изложение видов магнитуд вулканических извержений, тесно связанного с этим понятием степенного частотного распределения и иллюстрация их на конкретных примерах.

Распределения вероятностей с т.н. «тяжелыми хвостами» и магнитуда. В природе, обществе и в технике встречаются объекты (системы), в которых происходят отдельные события. Примерами могут служить землетрясения или извержения вулкана (вулканов) в определенном районе земли или на всей земле. В теории математической статистики параметры таких событий, например, энергии землетрясений или объемы изверженных продуктов во время конкретного извержения на выбранном интервале времени описываются некоей случайной величиной $\{X\}$. Для этой величины, как обычно, полагается теоретическая функция $F(x)$ и плотность распределения вероятностей $p(x)$ (об этом ниже). Изучая эмпирические частоты встречаемости основного параметра таких событий, мы все более точно приближаемся к теоретическим функциям распределения, которые могут быть использованы для практических выводов или теоретических построений.

Энергии землетрясений или объемы (массы) изверженных продуктов обычно располагаются в необычайно широком диапазоне, захватывающем много десятичных порядков. Распределения этих параметров, поэтому называются *распределениями с тяжелыми хвостами*. В этом их отличие от обычных, ограниченных по величине основного параметра распределений, например, распределения роста людей определенного возраста. Исследовать эмпирические распределения главного параметра (энергии, массы и т.д.) таких событий в силу огромного его диапазона невозможно. Поэтому всегда исследуют величины, которые принимает некоторая *функция главного параметра*, которая позволяет сжать огромный его диапазон в ограниченный диапазон, приемлемый для анализа. Обычно в качестве такой функции используется десятичный логарифм от энергии или массы событий, что называется *магнитудой*. Например, можно говорить о магнитуде землетрясения, о магнитуде вулканического извержения, о звездной величине и т.д. Наиболее часто распределения с «тяжелыми хвостами» принимают вид степенных распределений, что связано с самыми основными, фундаментальными свойствами природы, а использование \log_{10} имеет глубокий смысл.

Степенные распределения. Для случайной величины $\{X\}$, которая подчиняется степенному закону распределения, вероятность $P(X > x)$, что случайная величина больше чем x , описывается *дополнительной кумулятивной функцией распределения* [5]

$$P(x) = c x^{-b}, \quad x > 0, \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \quad (1)$$

где c и b – эмпирические положительные константы (b – показатель степени), а x_{\min} и x_{\max} – минимальное и максимальное значения, которое принимает случайная величина. Поскольку при $x \rightarrow 0$, $P(x) \rightarrow \infty$, то случайная величина должна быть ограничена снизу величиной $x \geq x_{\min}$. Поскольку случайная величина не может достигать бесконечно больших значений, отсюда возникает ограничение $x \leq x_{\max}$.

Выражение (1) показывает, что $P(x)$ сравнительно медленно спадает с увеличением x (распределение с «тяжелыми хвостами»). Заметим, что функция распределения $F(x) = (1 - P(x))$ уже не подчиняется степенному распределению.

Легко показать, что плотность вероятности $p(x)$ также распределена по степенному закону, но с показателем степени $-(b+1)$,

$$p(x) = [1 - P(X > x)]' = cbx^{-(b+1)} \quad (2)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x . Из выражения (2) следует, что $p(x)$ имеет показатель степени $-(b+1)$ и спадает с увеличением x гораздо быстрее, чем $P(x)$.

В силу огромного диапазона, занимаемого самой случайной величиной, анализировать представляется возможным только распределение *магнитуды* (y), где

$$y = \log_{10} x \quad (3)$$

Если в выражении (1) перейти к магнитуде (y) и учитывая, что $x = 10^y$, то логарифмируя выражение (1) получаем

$$\log_{10} P(x(y)) = \log_{10} C - by, \quad (4)$$

где C – есть некоторая константа.

Из (4) следует, что в координатах $(\log_{10} P(x(y)), y)$ дополнительная кумулятивная функция магнитуды (y) имеет линейный вид по магнитуде, что значительно улучшает наглядность и оценку важного *фрактального параметра* (b) линейным методом наименьших квадратов. На рис. 1 показаны два примера таких распределений.

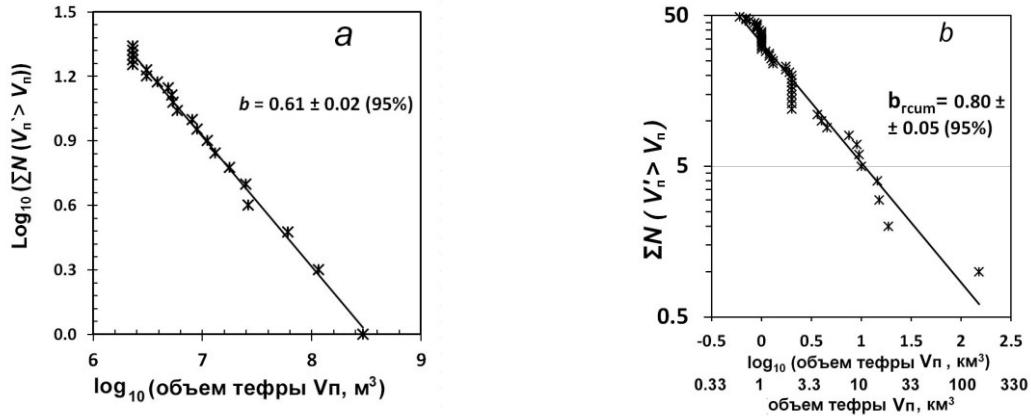


Рис. 1. Дополнительные кумулятивные функции для логарифмов объема тефры (V_n), изверженной вулканами Камчатки с 2006 по 2013 гг. по данным Н.А. Малик (а) и за голоценовое время по данным [3] (б).

На рис. 1 обращает на себя внимание значительно меньшая величина параметра b для небольших и умеренных извержений с объемами тефры до 0.33 км^3 ($\text{log}_{10} V_n < 8.5$) по сравнению с крупными извержениями с объемами до 120 км^3 (0.61 против 0.80).

Из выражений (2) и (3) можно вывести, что плотность вероятности ($p_1(y)$) магнитуды (y) степенного распределения также линейна в координатах $(\log_{10}(p_1(y)), y)$ с тем же самым угловым коэффициентом (b), а D – константа:

$$\log_{10}(p_1(y)) = D - by \quad (5)$$

То есть фрактальный параметр b может быть определен также путем построения дифференциального частотного распределения магнитуды (y) по формуле (5). В ряде случаев построение такого графика имеет смысл. Для этого весь диапазон магнитуд, как обычно, разбивается на равные интервалы, в пределах которых подсчитываются

количества событий. По этим данным затем строится график дифференциального частотного распределения магнитуды в логарифмическом диапазоне по оси ОУ (график повторяемости) (примеры см. в [1]).

Виды магнитуд вулканических извержений. Магнитуды в сейсмологии основаны на некоторых шкалах в попытке получить меру десятичного логарифма сброшенной во время землетрясения накопившейся в его очаге упругой энергии [2]. Напротив, вулканология, к сожалению, не имеет инструментально определяемой шкалы магнитуд, подобной той, которая успешно используется сейсмологами для землетрясений [7].

Вулканологические магнитуды бывают двух видов:

1) *Магнитуды, основанные на измерениях объемов отложений в поле* [6, 7]. Магнитудная шкала Тсуца, его магнитудные классы (I-IX), основанные на (десятичном) логарифме общего объема выброшенных пирокластических продуктов. Класс Токарева в виде десятичного логарифма массы всех изверженных продуктов в килограммах. В каталогах Смитсоновского института приведена:

$$\text{Магнитуда} = \log_{10} (\text{масса всех изверженных продуктов, кг}) - 7 \quad (6)$$

Нормировка на минус 7 сделана для того, чтобы примерно приравнять магнитуды извержений и магнитуды землетрясений.

«Точное измерение эруптивных объемов требует тщательной полевой работы и часто сопряжено с неразрешимыми неопределенностями. Многие трудности с проведением точных измерений, к сожалению, препятствуют представлению даже грубых оценок, и у нас есть объемная информация менее чем о пятой части извержений в нашем файле. Однако оценки объема могут быть сделаны через тысячи лет после извержения, и количество таких оценок быстро растет по мере того, как вулканологи собирают воедино истории крупных вулканов в голоцене» [7].

Методы оценки объемов современных извержений, основанные на данных аэрофотосъемки, требуют наличия аэрофотосъемки подстилающей поверхности, что имеется далеко не всегда. Кроме того, они необычайно трудоемки. В своих работах с О.В. Дирксом мы использовали подход Тсуца для взрывной магнитуды как логарифм объема пирокластики, выраженный в кубических метрах или километрах [1]. Автор использовал в качестве магнитуды также десятичный логарифм длительности сейсмических активизаций на вулканах Ключевской и Карымский [4].

2) *Полуколичественная магнитуда (Вулканический эксплозивный индекс, VEI)* (рис. 2).

VEI	0	1	2	3	4	5	6	7	8
General Description	Non-Explosive	Small	Moderate	Moderate-Large	Large	Very Large			
Volume of Tephra (m ³)	1x10 ⁴	1x10 ⁵	1x10 ⁷	1x10 ⁸	1x10 ⁹	1x10 ¹⁰	1x10 ¹¹	1x10 ¹²	
Cloud Column Height (km) Above crater Above sea level	<0.1	0.1-1	1-5	3-15	10-25		>25		
Qualitative Description	"Gentle,"	"Effusive"	"Explosive"		"Cataclysmic," "paroxysmal," "Severe," "violent," "terrific"		"colossal"		
Eruption Type (see fig. 7)		Hawaiian	Strombolian	Vulcanian	Plinian	Ultra-Plinian			
Duration (continuous blast)		<1 hr	1-6 hrs	6-12 hrs		>12 hrs			
Maximum explosivity	Lava flow	Dome or mudflow	Phreatic	Explosion or Nuée ardente					
Tropospheric Injection	Negligible	Minor	Moderate	Substantial					
Stratospheric Injection	None	None	None	Possible	Definite	Significant			
Eruptions	976	1239	3808	1083	412	168	50	6	0

Table 8. Volcanic Explosivity Index (VEI) criteria (Newhall and Self, 1982).

Рис. 2. Таблица для оценки величины Вулканического эксплозивного индекса VEI.

Вулканический эксплозивный индекс (VEI) основан на тех же логарифмических диапазонах объемов выброшенной тefры, что и магнитудные классы (I-IX) Тсуца. «Поскольку данных об объемах тefры в каталогах сравнительно мало, с целью расширить объем оценок также привлекаются качественные данные. VEI имеет

некоторое сходство со шкалой магнитуд Рихтера для землетрясений. Это простой индекс увеличения взрывоопасности от 0 до 8, где каждый интервал соответствует увеличению примерно в десять раз. *VEI* сочетает в себе общий объем продуктов взрыва, высоту эруптивного облака, описательные термины и другие показатели (рис. 2). Обратите внимание, что существует некоторое преднамеренное совпадение критериев присвоения *VEI*, и по возможности используется комбинация данных». «Фактически, *VEI* был разработан для помощи в изучении воздействия вулканизма на климат» [7]. В настоящее время этот критерий является основным, и мало кто задумывается, что *VEI* может использоваться только для грубой оценки взрывной активности извержения и не пригоден для расчета по *VEI* объема выброшенной тefфы. Это подкрепляется тем фактом, что в таблице на рис. 1 присутствуют только сравнительно короткие интервалы продолжительности взрывного извержения (порядка 12 часов). Подчеркнем, что *VEI* принимает только целочисленные значения от 0 до 8.

Выводы:

1) В природе, обществе и в технике встречаются объекты (системы), в которых происходят отдельные события, величины параметров которых занимают огромный диапазон, достигающий 12 десятичных порядков. В этом случае распределение параметров этих событий называется распределением с т.н. «тяжелыми хвостами». В этом они принципиально отличаются от быстро спадающих распределений, типа нормального или экспоненциального.

2) Важным и широко распространенным видом распределений с «тяжелыми хвостами» является степенное распределение. Это распределение связано с самыми основными, фрактальными свойствами объекта исследования. Оценка тангенса угла наклона графика повторяемости таких событий (фрактальный параметр) имеет важное теоретическое и практическое значение.

3) Магнитудой называется десятичный логарифм параметра, описывающего события, например, логарифм объема изверженной пирокластики во время конкретного извержения.

4) Анализ частотного распределения указанного параметра непосредственно невозможен в силу огромного занимаемого им диапазона. Вместо этого проводится анализ частотного распределения его магнитуд, который обычно аппроксимируется прямой линией по методу наименьших квадратов. Параметры полученной регрессионной зависимости имеют важное практическое и теоретическое значение.

Список литературы

1. *Иванов В.В., Дирксен О.В.* Распределение извержений вулканов на Камчатке по магнитудам в голоцене: геологический эффект эксплозивного вулканизма и прогнозные оценки // Вулканизм и связанные с ним процессы, 28-29 марта 2019 г. Петропавловск-Камчатский: ИВиС ДВО РАН, 2019. С. 78-81.
2. *Рихтер К.Ф.* Инструментальная шкала для магнитуд землетрясений. Слабые землетрясения. М: Изд-во иностранной литературы. 1961. С. 11-44.
3. *Bazanov L.I., Melekestsev I.V., Ponomareva V.V. et al.* Late Pleistocene and Holocene volcanic catastrophes in Kamchatka and in the Kuril Islands. Part 1. Types and classes of catastrophic eruptions as the leading components of volcanic catastrophism // *Journal of Volcanology and Seismology*. 2016. V. 10. № 3. P. 151-169.
4. *Ivanov V.V.* Power Law Distribution of Volcanic Eruptions in Size, a Mechanism of Magma Accumulation in the Earth's Lithosphere and Hazards Prediction // *Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья*. 2018. № 5. P. 43-51.
5. *Newman M.E.J.* Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // *Contemporary Physics*, September-October 2005. V. 46. № 5. P. 323-351.
6. *Pyle D.M.* Sizes of Volcanic Eruptions. In *Encyclopedia of volcanoes*. Second edition. 2015. P. 263-269.
7. *Siebert L., Simkin T., Kimberly P.* Volcanic explosivity index (VEI) and Volume of Products. In *Volcanoes of the World*. 3-d edition. Smithsonian Institution, University of California press. W., D.C.: 2010. P. 28-31.